Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 30. Juni 2000

13. Übung zur Analysis II

Abgabe: Dienstag,den 11.07.2000, 14.00 Uhr

Aufgabe 1 (5):
a) Man zeige, dass für jedes $A \in Mat(n \times n; \mathbb{R})$ die Definitionen

$$\sin A := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cos A := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}$$

sinnvoll sind und dass für kommutierende $n \times n$-Matrizen A, B die aus dem Reellen bekannten Additionstheoreme gelten:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

b) Man berechne $\exp(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (4): Man zeige, dass für $t \neq 0$ gilt:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + t^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{|t|}.$$

Darf man unter dem Integralzeichen differenzieren? Was gilt für $t = 0$?

Aufgabe 3 (4*) In Übung 2 hatten wir als Anwendungsaufgabe die beim Spannen einer Feder verrichtete Arbeit berechnet und damals schon angedeutet, dass man die mechanische Arbeit, die längs eines Weges durch ein Kraftfeld verrichtet wird durch ein Wegintegral beschrieben wird. Sei $\gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}^3$ ein Weg. Und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Kraftfeld. Dann kann man auf dem Wertebereich von γ die Kraft zerlegen in eine Komponente F_t tangential zur Kurve und in eine Kraft F_s senkrecht zur Kurve. Die mechanische Arbeit W ist dann das Wegintegral

$$W = -\int_{\gamma} F_t \, dx \ .$$

a) Sei die Erde die (x, y)-Ebene und die Gravitationskraft auf einen Körper der Masse m sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z)^t \mapsto (0, 0, -m\,g)$. Zeigen Sie, dass die verrichtete Arbeit nur von der Höhendifferenz und nicht von der gewählten Kurve abhängt. Gilt dasselbe auch für eine kugelförmige Erde mit radialem Kraftfeld?

b) Berechnen Sie für

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z)^t \mapsto (-y, x, z) \quad \text{und} \quad \gamma : [0; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (0, \cos t, \sin t)$$

die mechanische Arbeit W.