Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 30. Juni 2000

12. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 07.07.2000, 12.00 Uhr

Im nächsten Semester wird ein Proseminar zur Analysis II angeboten werden. Aufgabe wird es sein, ein Thema selbständig anhand eines Buches zu erarbeiten und den anderen Teilnehmern verständlich zu präsentieren. Interessenten melden sich bitte im Sekretariat an. Die Themenvergabe findet nach der Klausurrückgabe zur Analysis II statt, also am Dienstag, den 25.07.2000.
Die Anmeldung zur Klausur zur Analysis II liegt nun auch im Sekretariat aus. Bitte beachten Sie, dass Sie zur Klausur nur dann zugelassen sind, falls Sie in den Übungen die nötige Punktzahl erreicht haben. Im Zweifel wenden Sie sich bitte an die Assistenten, die Ihnen sagen können, wie viele Punkte Sie bisher erreicht haben.

Aufgabe 1 (2+2):
Man untersuche die folgenden Funktionen auf relative Extrema und Sattelpunkte und bestimme diese:

a) $f : M \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \, \log(x+y) - y$ für $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y > 0\}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2+y^2)\, e^{x^2-y^2}$

Aufgabe 2 (6): Für $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x\,e^x + y\,e^y + z\,e^z + x\,y\,z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U von $0 \in \mathbb{R}$ und V von $\binom{0}{0} \in \mathbb{R}^2$, sowie stetig differenzierbare Funktionen $v : U \to \mathbb{R}$ und $w : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass (1) in $U \times V$ äquivalent ist mit dem expliziten System

$$\begin{aligned} y &= v(x) \\ z &= w(x)\ . \end{aligned}$$

Berechnen Sie $v'(0)$, $w'(0)$ und $w''(0)$. Dabei dürfen Sie die Existenz von w'' voraussetzen.

Aufgabe 3 (4+2):

a) Man bestimme alle absoluten Extrema der Funktion $x^t\,A\,x$ unter der Nebenbedingung $x^t\,B\,x = 1$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\ .$$

b) Skizzieren Sie die Mengen $x^t\,A\,x = \lambda$ und $x^t\,B\,x = 1$ für einen Lagrangeschen Multiplikator λ ihrer Wahl.

Aufgabe 4 (6)
a) Sei $\gamma : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}^2, \Phi \mapsto (\exp(k\Phi)\cos\Phi, \exp(k\Phi)\sin\Phi)$. Zeigen Sie, dass γ rektifizierbar ist und berechnen Sie die Bogenlänge.
b) Sei γ wie in Beispiel XI(1.2)c) mit $a > b$. Man zeige, dass γ rektifizierbar ist mit $L(\gamma) = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a}\cos^2 t}$.
c) Berechnen Sie das Integral in b), indem man die Ferienübung Aufgabe 6 benutzt.

Aufgabe 5 (4*) Duopol:
Kritische Punkte (das sind gerade Punkte x mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$) lassen sich als "Gleichgewichtspunkte" deuten. So würde eine Kugel auf dem Graphen von f im Punkt $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, wenn $\bar{x}$ kritischer Punkt ist, nicht wegrollen. Die folgende Anwendung der Spieltheorie in den Wirtschaftswissenschaften soll verdeutlichen, dass auch andere Gleichgewichtskonzepte von Interesse sein können:
Emil und Frances haben je eine Firma, die Luftballons produziert. Die Produktionsmenge von Emil sei $x \in E(=\mathbb{R}^+)$, die von Frances sei $y \in F(=\mathbb{R}^+)$. Setzt man nun voraus, dass der Gewinn von Emil nur von den Produktionsmengen der beiden Firmen abhängt (was man bei einem Duopol annehmen kann), so kann man diesen Gewinn durch eine Funktion $f_E : E \times F \to \mathbb{R}$ modellieren. Der Gewinn von Frances sei $f_F : E \times F \to \mathbb{R}$. Der Witz ist nun, dass Emil nur die Größe x beeinflussen kann, während Frances nur die Größe y beeinflussen kann (wenn man Sabotage ausschließt). Welche Punkte in $E \times F$ sind von Interesse?
Um diese Frage zufriedenstellend zu beantworten, muss man sich ausgiebiger mit Spieltheorie auseinandersetzen; dennoch sollen zwei Konzepte vorgestellt werden:

a) Ein Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ heißt *nichtkooperatives Gleichgewicht* oder *Nash-Gleichgewicht*, falls

$$f_E(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{x \in E} f_E(x, \bar{y}) \quad \text{und} \quad f_F(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{y \in F} f_F(\bar{x}, y)$$

gilt. Beide Spieler können ihren Gewinn unter der Annahme, dass sich die Produktionsmenge des Konkurrenten nicht ändert, nicht erhöhen.

b) Ein Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ heißt *Pareto-Optimum*, falls es kein Paar $(x, y) \in E \times F$ gibt mit

$$f_E(x, y) > f_E(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{und} \quad f_F(x, y) > f_F(\bar{x}, \bar{y}).$$

Die Situation eines Pareto-Optimums lässt sich als "kooperativ" deuten. Wenn sich ein Punkt finden lässt so, dass beide Konkurrenten höheren Gewinn erzielen können, so wäre dieser Punkt dem aktuellen Punkt vorzuziehen.

Beachten Sie, dass die Menge der Pareto-Optima ziemlich groß ist. So ist jedes globale Maximum von f_E schon Pareto-Optimum. Frances wäre allerdings ziemlich selbstlos, wenn sie i. a. einen solchen Punkt akzeptierte. Ähnlich wie im Fall lokaler Extrema, in dem man mit der Menge der kritischen Punkte eine eventuell viel zu große Obermenge der Menge der lokalen Extremstellen bestimmt, scheint die Menge der Pareto-Optima eine Obermenge der Menge der "interessanten" Punkte zu sein.

Nun endlich zur eigentlichen Aufgabe: Der Preis eines Luftballons sei eine (affin) lineare Funktion der Gesamtproduktion, also

$$p(x, y) = \alpha - \beta\,(x + y) \qquad (\alpha \geq 0,\ \beta > 0).$$

Die Kosten seien ebenfalls affin linear, also

$$K_E(x, y) = \gamma_1\, x + \delta_1, \quad K_F(x, y) = \gamma_2\, y + \delta_2$$

Bestimmen Sie unter der Annahme *Umsatz = Preis × Produktionsmenge* die Gewinnfunktionen f_E und f_F, die Menge der Nash-Gleichgewichte und die Menge der Pareto-Optima.