Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 9. Juni 2000

10. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 23.06.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (2):
Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass

$$\operatorname{grad} f((x,y,z)^t) = (y^2 z,\ 2xyz,\ xy^2 + y)^t$$

für alle $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe 2 (3+4):
a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{(y^2+x)^4}{2\,x\,y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man zeige, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist, aber alle Richtungsableitungen dort verschwinden.
b) Man untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^3}{x^4+y^6} & y \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf partielle bzw. totale Differenzierbarkeit im Nullpunkt und bestimme dort im Falle der Existenz alle partiellen Ableitungen bzw. das totale Differential.

Aufgabe 3 (3):
Sei $u = u(x,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und genüge der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\, u\left(\frac{x}{a^2 t},\ -\frac{1}{a^4 t}\right), \qquad (t > 0)$$

dann ebenfalls der Wärmeleitungsgleichung genügt.

Aufgabe 4 (2+5):

a) Man entwickle die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2\,y + y^2\,x - y^3 - 1$$

in eine Taylorreihe um den Punkt $(1,-1)^t$.

b) Man entwickle die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto e^{x-y}\, sin(x+y)$$

in eine Taylorreihe um den Nullpunkt. Wo konvergiert die Reihe gegen die Funktion?