Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 31. Mai 2000

9. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 09.06.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (4+2*): a) Man zeige explizit (also mit Hilfe der Definition), dass die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, |y| \leq 1, |x| + |y| < 2\}$$

nicht kompakt ist.
b) Sei $\gamma : (-\infty; 0) \to \mathbb{R}^2$, $\phi \mapsto (e^\phi \cos\phi,\, e^\phi \sin\phi)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass das Bild von $(-\infty; 0)$ unter γ nicht kompakt ist.
c*) Zeichnen Sie die beiden Mengen z.B. mit Maple.

Aufgabe 2 (3): Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $K \subset V$ kompakt. Für $A \subset K$ sind äquivalent:

a) A ist kompakt.

b) A ist abgeschlossen.

Aufgabe 3 (6): Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $A, B \subset V$ zwei nichtleere Mengen. Sei $d(\cdot, B) : V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\|$$

der Abstand des Punktes x von der Menge B und

$$d(A, B) := \inf_{x \in A} d(x, B)$$

der Abstand der Mengen A und B. Man zeige:

a) $d(\cdot, B)$ ist (gleichmäßig) stetig.

b) Ist A kompakt, B abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$, dann ist $d(A, B) > 0$.

c) Man gebe im Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ zwei abgeschlossene Teilmengen A, B an mit $A \cap B = \emptyset$ und $d(A, B) = d_2(A, B) = 0$.

Aufgabe 4:(4) Man zeige, dass das Gleichungssytem

$$\begin{aligned} 3x &= \arctan(x + y) \\ 5y &= \exp(-(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

genau eine Lösung $(x, y) \in [-1; 1] \times [-1; 1]$ besitzt.

Aufgabe 5: (*2) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Formulieren das Minoranten- bzw. Majorantenkriterium, das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium für Reihen von Vektoren aus V bezüglich der Norm $\|\cdot\|$.