Lehrstuhl A für Mathematik — Aachen, den 24. Mai 2000
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

8. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 02.06.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+2+2): Sei $V = C[a;b]$ der Vektorraum der auf $[a;b]$ stetigen Funktionen.
a) Sind die L_2-Norm ($\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt$) und die Supremumsnorm ($\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$) zueinander äquivalent, existieren also $\alpha, \beta > 0$, so dass die folgende Gleichung

$$\alpha\|f\|_\infty \le \|f\|_2 \le \beta\|f\|_\infty \quad \text{für alle } f \in C[a;b]$$

gilt?
b) Sei $C^1[a,b]$ die Menge der auf $[a;b]$ stetig differenzierbaren Funktionen. Ist $C^1[a;b]$ offen oder abgeschlossen bezüglich der beiden Normen?
c) Ist die Abbildung $\Phi : C^1[a;b] \to C[a;b], f \mapsto f'$, bezüglich der Supremumsnorm stetig?
c) Sei $\mathcal{R}[a;b]$ die Menge der auf $[a;b]$ integrierbaren Funktionen. Für $f \in \mathcal{R}[a;b]$ sei $\|f\|_2^2 := \int_a^b |f(t)|^2 dt$ und $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$. Ist $(\mathcal{R}[a;b], \|\ \|_2)$ bzw.$(\mathcal{R}[a;b], \|\ \|_\infty)$ ein normierter Vektorraum?

Aufgabe 2 (2+2):
a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetig in $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$ und sei $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Man zeige, dass g_i ist stetig in a_i für alle $1 \le i \le n$.
b) Gilt die Umkehrung auch?

Aufgabe 3 (4+2) a) Man untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit im Nullpunkt:

i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y)^t \mapsto \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ x^{y^2} & x > 0 \end{cases},$

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad z := (x,y)^t \mapsto \begin{cases} \frac{x^2|y|^3}{x^2-xy+y^2} & z \ne 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}.$

b) Sei $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad z := (x,y)^t \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & z \ne 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}.$

Man berechne $\lim_{z\to 0} f_3(z)$ längs der Wege

i) $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$

ii) $y = bx^2$, $b \in \mathbb{R}$

iii) $y^2 = 2cx$, $c \in \mathbb{R}$, $c \ne 0$

Ist f stetig?

Die nächste Aufgabe kann bis zum Freitag, den 16.06.2000 abgegeben werden. Der Abgabetag liegt in der Exkursionswoche.

Aufgabe 4:(*10) Definieren Sie den Begriff der lokalen Lipschitzstetigkeit für reelle Funktionen. Untersuchen Sie den Begriff in Form eines Aufsatzes. Die Abgabe sollte gut formuliert sein. Orientieren Sie sich in der Struktur oder Form am besten an der Vorlesung, d.h. Sie gliedern den Text in Definitionen, Sätze, Beweise, Bemerkungen und Beispiele. Inhaltlich sind die Zusammenhänge zur (Lipschitz-) Stetigkeit, zur Differenzierbarkeit, zur Integrierbarkeit, zur gleichmäßigen Konvergenz, zur Beschränktheit, usw. zu untersuchen. Denken Sie auch daran, Ihre Arbeit mit Beispielen zu illustrieren und Zusammenhänge zu verdeutlichen. (Falls Sachen i.a. nicht gelten, sollte dazu auch ein Gegenbeispiel gebracht werden.)