LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner Aachen, den 17. Mai 2000

7. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 26.05.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (2+1+2+2+3):

a) Man beweise $$\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi^2}{6} .$$

b) Zeigen Sie für alle $x \in [-1;1)$ $$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k$$

Hinweis: Ferienübung

c) Zeigen Sie für alle $x \in [0;1]$ $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} .$$

d) Man zeige für $k \in \mathbb{N}_0$ $$\int_0^1 x^{2k} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (-1)^k \binom{-\frac{3}{2}}{k}^{-1} .$$

e) Mit Hilfe von a), c) und d) beweise man nun

(i) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} ,$$

(ii) $$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} .$$

Aufgabe 2 (2+2+2+2+2+2+2):
Untersuchen Sie für die folgenden Beispiele, ob es sich um normierte Vektorräume handelt. Falls dies der Fall ist, prüfen Sie, ob der normierte Raum vollständig ist:

a) $(l^p, \|\cdot\|_p)$ mit $l^p = \{(x_j)_{j\geq 1};\ x_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \text{ konvergent } \}$ und $\|x\|_p := (\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$.

b) $(C^1([a;b]), \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|f\|_\infty := \sup_{a\leq t\leq b} |f(t)|$.

c) $(C^1([a;b]), \|\cdot\|)$ mit $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

d) $(C([a;b]), \|\cdot\|)$ mit $\|f\| := \int_a^b |f(t)|\,dt.$

e) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ mit $c_0 := \{(x_n)_{n\geq 1};\ x \text{ reelle Nullfolge } \}$ und $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$

f) $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, wobei $l^\infty = \{(x_n)_{n\geq 1};\ x_n \in \mathbb{R},\ \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \}$

g) $(l^p, \|\cdot\|_\infty)$ mit l^p wie in a) und $\|\cdot\|_\infty$ wie in f).

Aufgabe 3:(4+2)

a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $V \neq \{0\}$

  (i) Gibt es eine Norm $\|\cdot\|_t$ auf V so, dass die leere Menge und V die einzigen offenen Mengen in $(V, \|\cdot\|_t)$ sind?

  (ii) Gibt es eine Norm $\|\cdot\|_d$ auf V so, dass alle Teilmengen von V offene Mengen in $(V, \|\cdot\|_d)$ sind?

b) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$. Für ein $f \in V$ bezeichne $\mathcal{U}_f$ die Menge aller Umgebungen von f. Beweisen Sie:

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}_f} \overline{U} = \{f\}$$

Hiermit möchten wir an Semesteraussprache erinnern:

RWTH Aachen
Fachgruppe Mathematik

15.05.00

Semesteraussprache

Die Semesteraussprache für Zweitsemester in Mathematik findet am

Mittwoch, dem 31. Mai 2000, um 15.45 Uhr
im Hörsaal Phil

statt. Herzlich eingeladen sind dazu alle Hörer der Vorlesungen Analysis II, Lineare Algebra II, Einführung in die Stochastik für Mathematiker.

Prof. Dr. A. Krieg
- Fachgruppensprecher -