LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 05. Mai 2000

5. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 12.05.2000, 11.45 Uhr

Aufgabe 1 (1+2+2+2+1): Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz:

a) $\displaystyle\int_1^7 \frac{1}{(5-x)^3} dx,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right) dx,$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos(1/x)}{x^{8/7}} dx,$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx,$

e) $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx.$

Aufgabe 2 (2+1+4+2+2): Wir möchten Ihnen in dieser Aufgabe eine Methode zeigen, wie man $\Gamma(1/2)$ ausrechnen kann. Dazu definiert man für $s, t > 0$ folgende Funktion

$$B(s,t) := \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\, dx.$$

Sie wird Beta-funktion genannt. In der Literatur findet man für das Integral auch die Bezeichnung "erstes Eulersches Integral". Zeigen Sie folgende Punkte:

a) Die Funktion ist wohldefiniert.

b) $B(s,t) = B(t,s)$.

c) $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$.

d) Berechnen Sie nun $\Gamma(1/2)$ und $\Gamma(3/2)$.

e) Welche Funktion wird durch das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 |\log x|^t dx,\ t > 0,$$

dargestellt.

Hinweis: Betrachten Sie bei Teil c) dabei für festes s die Funktion $B(s,t)\Gamma(s+t)$ und benutzen Sie den Satz von Bohr.

Aufgabe 3 (3): Man beweise die Legendre'sche Verdopplungsformel:

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2^{1-x}\sqrt{\pi}\Gamma(x),\ x > 0.$$

Aufgabe 4 (*4): Eine Rakete fliege längs der x-Achse. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich die Rakete in der Position $x(0) = 0$, habe die Startmasse $m(0) = m_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = v(0) = 0$. Der Treibstoff habe die Menge $l < m_0$. Die Ausströmungsgeschwindigkeit u der Gase sei konstant gleich -c. Die Verbrennungsrate sei bis zur Brenndauer (aller Brennstoff ist verbrannt) $t = T$ ebenfalls konstant gleich α.
Die Grundgleichung der Raketenbewegung ist

$$m\ddot{x} = \dot{m}u + F,$$

wobei F die äusseren Kräfte, also vereinfachter Weise hier nur die Kraft $F(t) = -m(t)g$ beschreibt. Welche Höhe hat die Rakete zur Zeit T? Bestimmen Sie die dafür die Brenndauer. Welche Geschwindigkeit hat sie dann erreicht? Wie ist die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 2T$? Dabei bedeutet der Punkt über einer Variablen deren zeitliche Ableitung.