Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 28. April 2000

4. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 05.05.2000, 11.45 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte): Skizzieren Sie die durch die y-Achse und die Funktionen

$$y_0(x) = x + 1\ , \quad y_1(x) = x^2\ , \quad y_2(x) = \frac{1}{2} - x^2 \qquad (x \geq 0)$$

begrenzte Fläche und bestimmen Sie ihren Flächeninhalt.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte): Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Ist f uneigentlich Riemann-integrierbar, so gilt

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\ .$$

b) Existiert der Limes

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx\ ,$$

so muss f nicht uneigentlich Riemann-integrierbar sein.

Aufgabe 3 (2+4+2 Punkte):

a) Sei $f : (a; b] \to \mathbb{R}$ stetig und es existiere $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$. Zeigen Sie, dass f über $(a; b]$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

b) Sei $f : (a; \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und es existiere $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$. Zeigen Sie, dass f über $(a; \infty)$ genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar ist, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert so, dass $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$ für alle $x_2 > x_1 > x_0$ gilt.

c) Beweisen Sie die Existenz von

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\ .$$

Aufgabe 4 (2+2+2+2 Punkte):

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,|x|}\,dx$,

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$,

iii) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

b) Zeigen Sie: $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\,(\log x)^{\alpha}}\,dx$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.

Aufgabe 5 (* 3+2+1 Sonderpunkte): Wirtschaftswissenschaftler erfassen den "Zustand" eines Unternehmens gerne quantitativ, beschreiben also ein Unternehmen durch ein Tupel von Zahlen bzw. Funktionen, wie z. B. Umsatz oder Gewinn in Abhängigkeit von der Produktion. Diese Größen hängen teilweise zusammen, so ist $Gewinn = Umsatz - Kosten$. Natürlich ist für ein Unternehmen interessant, ob sich der Gewinn vergrößert, wenn die Produktion erhöht wird. Mathematisch modelliert bedeutet diese Frage (lokal), ob die Ableitung der Gewinnfunktion bei der aktuellen Produktionsmenge positiv ist. Zur Unterscheidung der Gewinnfunktion von ihrer Ableitung nennen Wirtschaftswissenschaftler die Gewinnfunktion auch *Gesamtgewinn* und deren Ableitung *Grenzgewinn*. Diese Bezeichnungsweise gilt für alle oben angesprochen Parameter, also Kosten, Umsatz, ...

a) Gegeben seien eine Grenzkostenfunktion $\tilde{K} = 3\,x^2 - 8\,x + 8$ und eine Grenzumsatzfunktion $\tilde{U} = 12 - 4\,x$. Berechnen sie daraus so genau wie möglich:

   i) die Gesamtkostenfunktion
   ii) die Durchschnittskostenfunktion[1]
   iii) die Gesamtumsatzfunktion
   iv) die Durchschnittsumsatzfunktion
   v) die Gesamtgewinnfunktion
   vi) die gewinnmaximale Menge

b) Ein Unternehmen produziert 3000 Fahrräder am Tag. Die Grenzproduktivität für zusätzlich eingesetzte Arbeitskräfte beträgt $\tilde{x} = 75 - \sqrt{r}$. Wieviele Fahrräder können produziert werden, wenn 10 zusätzliche Arbeitskräfte eingesetzt werden?

c) Die Fläche unterhalb der Grenzumsatzkurve zwischen $x = 0$ und $x = x_0$ gibt den Gesamtumsatz an der Stelle $x = x_0$ an. Warum gilt dasselbe nicht bei der Kostenfunktion?

[1] In wirtschaftspolitischen Debatten werden die Durchschnittskosten auch als Stückkosten bezeichnet.