Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 19. April 2000

3. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 28.04.2000, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte): Man berechne die Ableitung von

$$F(x) := \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0;\infty)$ und zeige, dass F' auf keinem Intervall $[0;b]$, $b > 0$, Riemann-integrierbar ist. Wieso ist dies kein Widerspruch zum Fundamentalsatz?

Aufgabe 2 (5 Punkte): Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^x u^2 e^{2u}\, du$

b) $\displaystyle\int_0^x \arctan u\, du$

c) $\displaystyle\int_0^x \frac{d}{dy} sin^2(y+\sqrt{2})\, dy.$

Aufgabe 3 (7 Punkte): Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4 - x^3 - x + 1}\, dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^6 + x^4 - x^2 - 1}\, dx.$

Aufgabe 4 ($*$):(2. Mittelwertsatz von Bonnet)
Seien $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ monoton auf $[a;b]$ und f', $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a;b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a;b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\, dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\, dx.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte): (Bimolekülreaktion)
Zwei Ausgangsstoffe haben zur Zeit $t = 0$ die Konzentrationen a bzw. b gemessen in $\frac{Mol}{l}$. Dabei sei o.B.d.A. $0 < a < b$. Nun sei $x(t)$ die Konzentration des durch chemische Reaktion aus den beiden Ausgangsstoffen entstehenden Reaktionsproduktes zur Zeit t. Dabei habe zur Zeit $t = 0$ noch keine Reaktion stattgefunden. Im einfachsten Fall (Reaktionsprodukt enthält je ein Molekül der Ausgangsstoffe) erfüllt $x(t)$ nach dem Massenwirkungsgesetz die Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = k\,(a - x(t))\,(b - x(t))\ , \tag{1}$$

d. h. die Reaktionsgeschwindigkeit ist proportional zum Produkt der Konzentrationen der Ausgangsstoffe. Gleichung (1) ist eine Differentialgleichung für $x(t)$. Differentialgleichungen treten in den naturwissenschaftlichen Anwendungen sehr häufig auf, werden in größerem Rahmen aber erst in Analysis III behandelt.

Für $0 < x < a$ ist die rechte Seite von (1) positiv, also $x(t)$ streng monoton wachsend. Deshalb besitzt $x(t)$ dort eine Umkehrfunktion $t(x)$. Für diese gilt (Ableitung der Umkehrfunktion)

$$\frac{d}{dx}t(x) = \frac{1}{k\,(a-x)\,(b-x)}\ . \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Funktion $t(x)$. Wie hat man dabei die Integrationskonstante zu wählen, um sie den Versuchsgegebenheiten anzupassen? Was ergibt sich für die eigentlich gesuchte Funktion $x(t)$? Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie überprüfen, ob Ihre Lösung (1) erfüllt.