LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr.A. Krieg
Dipl.-Math. H. Hassenpflug, A. Marschner

Aachen, den 17.04.2000

Integrationsmethoden

Das Differenzieren elementarer Funktionen ergibt wieder elementare Funktionen, jedoch ergibt die Integration elementarer Funktionen nicht immer elementare Funktionen.

Elementare Funktionen sind hierbei die Klasse der algebraischen Funktionen und $\sin x, \cos x, e^x$, $\log x$ sowie alle daraus durch Zusammensetzung oder Umkehrung entstehenden Funktionen.

Beispiel: Der **Integralsinus** $\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \sin(t)/t\,dt$ gehört nicht zu den elementaren Funktionen.

Es gibt kein allgemeingültiges Verfahren zur Bestimmung einer Stammfunktion. Wir geben deshalb eine Sammlung von „Einzelrezepten" an, mit denen man bestimmte Typen von Integralen berechnen kann.

1 Anwenden der Fundamentalsätze

Falls der Integrand die Ableitung einer bekannten Funktion ist, lässt sich die Stammfunktion leicht erraten – diese ist nämlich im Wesentlichen die bekannte Funktion. Dabei benutzt man den Fundamentalsatz der Differentialrechnung, um die gewünschte Stammfunktion zu berechnen.

Beispiel:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \tag{1}$$

Zur Schreibweise: Man gibt die Stammfunktion häufig in der allgemeinen Form an, also mit einer additiven Konstanten c, in der Vorlesung wird wie auch hier i.A. die Schreibweise ohne die additive Konstante benutzt. Setzt man die Grenzen ein, so gilt für das obige Beispiel:

$$\int_a^b x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Insbesondere gilt:

$$\int_a^x t^\alpha\,dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Wichtig: Es dürfen nur solche Grenzen a, b eingesetzt werden, für die der Integrand auf dem ganzen Intervall $[a; b]$ integrierbar ist (also insbesondere beschränkt).

2 Partielle Integration

Sind $f, g \in C^{(1)}[a; b]$, dann gilt (vgl. Satz VII (2.7))

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{2}$$

3 Substitution

Es seien $f \in C[a;b]$ und $h \in C^{(1)}[\alpha;\beta]$ mit $h([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$. Dann gilt (vgl. Satz VII (2.8)

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(v)\,dv = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(u))h'(u)\,du. \tag{3}$$

4 Logarithmisches Integrieren

Eine Substitution $y = f(x)$ liefert unter den Voraussetzungen wie in Satz VII (2.8))

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y| = \log|f(x)|. \tag{4}$$

Bemerkung zum Betrag: Für $\int 1/y\,dy$ kommen nur Grenzen a, b mit $a < b < 0$ oder $0 < a < b$ in Frage, da $1/y$ im Nullpunkt unbeschränkt ist. Im Fall $a < b < 0$ gilt (substituiere $y = -u$):

$$\int_a^b \frac{1}{y}\,dy = \int_{-a}^{-b} \frac{1}{u}\,du = -\int_{-b}^{-a} \frac{1}{u}\,du = -\int_{|b|}^{|a|} \frac{1}{u}\,du = -[\log u]_{|b|}^{|a|} = \log|b| - \log|a|.$$

5 Integral über „Funktion mal Ableitung"

Eine Substitution $y = f(x)$ liefert sofort die einfache Formel

$$\int f'(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(x)]^2. \tag{5}$$

Auch hier sind die Voraussetzungen von Satz VII (2.8) zu beachten.

6 Grundintegrale mit quadratischen Formen

Jedes Integral der Form $\int 1/q(x)\,dx, \int 1/\sqrt{q(x)}\,dx$ bzw. $\int \sqrt{q(x)}\,dx$ mit $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ und $\gamma \neq 0$ läßt sich durch die Substitution (quadratische Ergänzung in $q(x)$)

$$u = \sqrt{|\gamma|}\left(x + \frac{\beta}{2\gamma}\right)$$

auf ein Integral der Form $\int 1/(a^2 \pm x^2)\,dx, \int 1/\sqrt{\pm(a^2 \pm x^2)}\,dx$ bzw. $\int \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\,dx$ bringen.

Diese Integrale sind nach einer Substitution durch Logarithmen oder Umkehrungen von trigonometrischen oder hyperbolischen Funktionen darstellbar.

Beispiel: Eine Substitution $y = x/a$ liefert ($a \neq 0$)

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + (x/a)^2}\frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{a}\arctan y = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right). \tag{6}$$

7 Integration von rationalen Funktionen

In diesem Abschnitt wird die `Partialbruchzerlegung` behandelt, mit der Integrale vom Typ

$$\int \frac{p_n(x)}{q_m(x)}\,dx, \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k; \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}; \quad n, m \in \mathbb{N}$$

berechnet werden können. Wie man im Allgemeinen ein solches Integral berechnet, soll im Folgenden systematisch in 5 Schritten erklärt werden:

1. Schritt: Man kürze den Bruch so weit, dass $p_n(x)$ und $q_m(x)$ keine gemeinsamen Faktoren mehr enthalten. Dazu

Satz 1 ***(Fundamentalsatz der Algebra)*** *Ein Polynom der Form* $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ *mit* $a_n = 1$ *läßt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig in der Form* $(r, s \in \mathbb{N}_0)$

$$p_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + \beta_s x + \gamma_s)^{\mu_s} \tag{7}$$

darstellen, wobei die Faktoren alle voneinander verschieden sind und $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ *für* $1 \le j \le s$ *gilt. (Nenne* $x_1, \ldots, x_r$ *die reellen Wurzeln des Polynoms. Falls* $s \ge 1$ *ist, spricht man vom Auftreten komplexer Wurzeln.) Gegebenenfalls treten keine reellen* $(r = 0)$ *bzw. keine komplexen* $(s = 0)$ *Wurzeln auf.*

Bemerkung: Folgende Schritte funktionieren auch dann, wenn der erste Schritt weggelassen wird. Trotzdem sollte man die zu integrierende Funktion unbedingt gemäß Schritt 1 vereinfachen, um sich im weiteren Arbeit zu ersparen.

2. Schritt: Falls $m \le n$ ist, spaltet man den ganz-rationalen Teil des Bruches ab (d.h. ein Polynom). Es bleibt ein echt-rationaler Bruch (d.h. Nennergrad > Zählergrad) als „Rest" übrig.

Beispiel:

$$\frac{x^4 - 7x^2 + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = x + 3 + \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 3x^2 - x + 3}. \tag{8}$$

Das Polynom $x + 3$ kann wie in Abschnitt 1 integriert werden. Für den verbleibenden Bruch wendet man die Partialbruchzerlegung an:

3. Schritt: **<u>PARTIALBRUCHZERLEGUNG</u>**

(Bezeichne den zuletzt im 2. Schritt entstandenen „echt-rationalen" Bruch wieder mit $p_n(x)/q_m(x)$, wobei also $n < m$.) Das Ziel in diesem dritten Schritt wird sein, die zu integrierende Funktion als Summe von (leichter integrierbaren) Partialbrüchen zu schreiben:

Definition: *Als* ***Partialbruch*** *einer rationalen Funktion bezeichnet man einen Ausdruck der Form*

$$\frac{A}{(x - x_j)^k}; \qquad A, x_j \in \mathbb{R}; \quad k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

oder

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^m}; \qquad \beta^2 - 4\gamma < 0; \qquad B, C, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; \quad m \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Satz 2 ***(Partialbruchzerlegung)*** *Eine rationale Funktion* $p_n(x)/q_m(x)$ *mit* $n < m$ *und* $q_m(x) = x^m + \ldots$ *kann bis auf die Reihenfolge auf genau eine Weise als Summe von Partialbrüchen geschrieben werden. Es gibt also eine Darstellung (dabei ist für* $s = 0$ *(bzw.* $r = 0$*) die dann auftretende „leere Summe" als Null definiert)*

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{k,j}}{(x - x_j)^k} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{B_{k,j}x + C_{k,j}}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^k}, \tag{11}$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ *mit* $q_m(x) \neq 0$ *gültig ist und bei der alle Koeffizienten eindeutig bestimmt sind.*

Beachte: Zu jedem x_j werden in diesem Ansatz <u>alle</u> Potenzen

$$\frac{A_{1,j}}{x - x_j} + \frac{A_{2,j}}{(x - x_j)^2} + \frac{A_{3,j}}{(x - x_j)^3} + \cdots + \frac{A_{k_j,j}}{(x - x_j)^{k_j}}$$

(k_j = Vielfachheit der Nullstelle x_j von $q_m(x)$) aufgenommen. Es gibt Fälle, in denen sie alle gebraucht werden, z.B. ergibt sich folgende Partialbruchzerlegung (geometrische Summe):

$$\frac{x^n - 1}{x^{n+1} - x^n} = \frac{1}{x-0} + \frac{1}{(x-0)^2} + \cdots + \frac{1}{(x-0)^n}. \tag{12}$$

$\boxed{\textbf{4. Schritt:}}$ Bestimme die Werte für r, x_j, k_j und $s, \beta_j, \gamma_j, \mu_j$ in der Partialbruchzerlegung (11). Dazu braucht man (nur) die Produktdarstellung von $q_m(x)$ nach Satz 1 zu bestimmen. (Die Bestimmung der Nullstellen von q_m erfolgt in einfachen Fällen z.B. durch „Raten".)

Beispiel: Im obigen Beispiel (8) ist $m = 3$, also $q_3(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Es befinden sich offensichtlich Nullstellen bei $x = 1$ und $x = -1$. Dividiert man das Polynom nun durch $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$, so folgt $q_3(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$. Damit gilt in diesem Beispiel $r = 3, s = 0, x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, k_j = 1$ für $j \in \{1, 2, 3\}$.

$\boxed{\textbf{5. Schritt:}}$ Man bestimme nun die Konstanten $A_{k,j}, B_{k,j}, C_{k,j}$ in der Partialbruchzerlegung (11). Grundsätzlich geht man dazu die folgenden drei Schritte durch:

(i) Ansatz der Form (11) unter Verwendung der in Schritt 4 berechneten Werte.
(ii) Multipliziere diese mit $q_m(x)$ und erhalte so eine Gleichung zwischen zwei Polynomen.
(iii) Ermittle $A_{k,j}, B_{k,j}, C_{k,j}$ nach den folgenden Methoden:

Koeffizientenvergleich, vgl. Anhang 9.1,

Einsetzungsmethode, vgl. Anhang 9.2,

Ableitungsmethode, vgl. Anhang 9.3.

Hat man die unbekannten Größen alle bestimmt, dann muss man noch die Integrale über die einzelnen Partialbrüche berechnen. Prinzipiell treten verschiedene Grundintegrale auf, je nach Art der Nullstellen von $q_m(x)$. Die vier unterschiedlichen Fälle, die möglich sind, werden nun der Reihe nach in 7.1 bis 7.4 abgehandelt:

7.1 Fall 1: Nenner hat einfache reelle Wurzeln

Alle Wurzeln von $q_m(x)$ sind reell und einfach ($k_j = 1, j \in \{1, \ldots, r\}, r = m, s = 0$). Von (11) bleibt dann nur noch übrig:

`Ansatz`:

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_m}{x - x_m}.$$

Das obige Beispiel (8) gehört in diesen Fall. Die Koeffizientenbestimmung mittels des Koeffizientenvergleichs wird im Anhang 9.1 durchgeführt.

Die fertige Partialbruchzerlegung lautet dann:

$$\frac{x^4 - 7x^2 + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = x + 3 + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{11}{4}\frac{1}{x-3}. \tag{13}$$

Bei der Integration dieser Gleichung erhält man dann Integrale vom Typ $\int 1/(x-a)\,dx$. Diese bringt man mit Hilfe der Substitution $y = x - a$ auf die Form $\int 1/y\,dy$ und löst dieses dann wie in Abschnitt 4. Im obigen Fall ergibt sich als Endresultat:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 7x^2 + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\,dx &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{11}{4}\log|x-3| \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{4}\log\left|\frac{(x-1)^2(x-3)^{11}}{x+1}\right| \end{aligned}$$

Damit ist der Fall 1 der Partialbruchzerlegung (11) durchdiskutiert und für das Beispiel (8) gelöst.

7.2 Fall 2: Nenner hat mehrfache reelle Wurzeln

Alle Wurzeln von $q_m(x)$ sind reell, mindestens eine ist dabei aber mehrfach. Zur Berechnung der Koeffizienten benutzt man den Koeffizientenvergleich (vgl. Anhang 9.1) oder die Ableitungsmethode (vgl. Anhang 9.3). Es gilt also für die Partialbruchzerlegung (11) $\sum_{j=1}^{r} k_j = m, s = 0, B_{k,j} = C_{k,j} = 0$, aber mindestens ein $k_j > 1$. Dann lautet der `Ansatz`:

$$\begin{aligned} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{2,1}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1,1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{1,2}}{x-x_2} \\ &\quad + \frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{k_2,2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

Beispiel: (vgl. (12)) Die geometrische Summe liefert

$$\frac{x^n-1}{x^{n+1}-x^n} = \frac{1}{x^n}\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{1}{x^n}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1).$$

Wie man sieht, hat das Nennerpolynom eine n-fache Nullstelle bei $x_1 = 0$. Mit dem Ansatz

$$\frac{x^n-1}{x^{n+1}-x^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}{x^n} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{2,1}}{x^2} + \cdots + \frac{A_{n,1}}{x^n}$$

erhält man sofort die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = A_{1,1}x^{n-1} + A_{2,1}x^{n-2} + \cdots + A_{n,1}. \tag{15}$$

Hier folgt mittels Koeffizientenvergleich unmittelbar $A_{1,1} = A_{2,1} = \ldots = A_{n,1} = 1$. Im Anhang 9.3 werden die Koeffizienten exemplarisch auch mit der Ableitungsmethode berechnet.

Im Fall 2 entstehen Integrale vom Typ $\int 1/(x-a)\,dx$ (vgl. Fall 1) und vom Typ $\int 1/(x-a)^k\,dx, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ (vgl. auch Beispiel im Anhang 9.3). Letztere Integrale werden leicht mit der Substitution $y = x - a$ ausgerechnet:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int \frac{dy}{y^k} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

Das Endergebnis für das Integral der Funktion in (12) ist also:

$$\int \frac{x^n-1}{x^{n+1}-x^n}\,dx = \log|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \ldots - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}. \tag{16}$$

7.3 Fall 3: Nenner hat einfache komplexe Wurzeln

Der Nenner $q_m(x)$ hat reelle und einfache komplexe Wurzeln, d.h. es treten in (7) (bzgl. $q_m(x)$) quadratische Faktoren $(x^2+\beta x+\gamma)^\mu$ mit $\mu = 1$ und $\beta^2 - 4\gamma < 0$ auf.

In diesem Fall reduziert sich die Partialbruchzerlegung (11) auf den `Ansatz`

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{k,j}}{(x-x_j)^k} + \sum_{j=1}^{s} \frac{B_j x + C_j}{x^2+\beta_j x+\gamma_j}. \tag{17}$$

Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt dann mittels Koeffizientenvergleich (Anhang 9.1) oder Ableitungsmethode (Anhang 9.3). Dabei berechnet man zuerst die Koeffizienten, die zu den einfachen Wurzeln gehören (Einsetzungsmethode, Anhang 9.2).

Beispiel: Gesucht ist das Integral

$$\int \frac{x+1}{x(x^3-1)}\,dx = \int \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)}\,dx. \tag{18}$$

Man benutzt also den Ansatz

$$\frac{x+1}{x(x^3-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Hauptnenner, so folgt

$$\begin{aligned} & x+1 = A_1x^3 - A_1 + A_2x^3 + A_2x^2 + A_2x + (Bx^2+Cx)(x-1) \\ \iff\quad & x+1 = x^3(A_1+A_2+B) + x^2(A_2-B+C) + x(A_2-C) - A_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Setzt man $x=0$, dann folgt sofort $A_1 = -1$ und für $x=1$ folgt sofort $A_2 = 2/3$. Für die verbleibenden Unbekannten kann man die Ableitungsmethode (Anhang 9.3) verwenden:

1. Ableitung von (19) und $x=0$ ergibt $C = -1/3$.
2. Ableitung von (19) und $x=0$ ergibt $B = 1/3$.

(Alternativ könnte man natürlich in (19) einen Koeffizientenvergleich durchführen und das dann entstehende Gleichungssystem wie in der Linearen Algebra lösen. — Wer die Wahl hat, hat die Qual.)

Damit lautet die fertige Partialbruchzerlegung für den Integranden von (18) also

$$\frac{x+1}{x(x^3-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Im Fall 3 entstehen Integrale vom Typ $\int 1/(x-a)^k\,dx, k\in\mathbb{N}$, wie zuvor im Fall 2, und vom Typ

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+2C/B}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx \\ &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx. \end{aligned} \tag{20}$$

Hier ist das erste Integral — und mit diesem Ziel wurde das zu berechnende Integral aufgespalten — von der Form $\int f'(x)/f(x)\,dx$ (siehe Abschnitt 4: Logarithmisches Integrieren), während das zweite Integral durch quadratische Ergänzung auf die Form

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u$$

gebracht werden kann (man beachte, daß hier $\beta^2 - 4\gamma < 0$ ist und vergleiche (6) in Abschnitt 6):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+\beta x+\gamma} &= \int \frac{dx}{(x+\beta/2)^2 + (\gamma-\beta^2/4)} = \ldots \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\gamma-\beta^2/4)}}\arctan\left(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{(\gamma-\beta^2/4)}}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Damit gilt in dem speziellen Fall von Gleichung (18) für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $x\neq 0, x\neq 1$:

$$\int \frac{x+1}{x(x^3-1)}\,dx = -\log|x| + \frac{2}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\log|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

7.4 Fall 4: Nenner hat mehrfache komplexe Wurzeln

Der Nenner besitzt mehrfache komplexe Nullstellen, d.h. in (7) treten Exponenten $\mu_j > 1$ auf. Der Ansatz ist wie in der allgemeinen Partialbruchzerlegung (11). Die „einfachen" Koeffizienten werden mit der Einsetzungsmethode (Anhang 9.2) bestimmt, die übrigen mit Koeffizientenvergleich (Anhang 9.1) oder mit der Ableitungsmethode (Anhang 9.3). Dabei entstehen neben Integralen der obigen Formen Integrale vom Typ

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx; \qquad k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Diese Integrale werden im Prinzip wie in Fall 3 gelöst, wobei zusätzlich eine partielle Integration ausgeführt wird:

Spalte zunächst ein Integral der Form

$$\int \frac{(k-1)f'(x)}{[f(x)]^k}\,dx = -\frac{1}{[f(x)]^{k-1}}$$

ab, wobei $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$. Dann folgt, da $f'(x) = 2x + \beta$:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{[f(x)]^k}\,dx &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+2C/B}{[f(x)]^k}\,dx \\ &= \frac{B}{2(k-1)}\int \frac{(k-1)f'(x)}{[f(x)]^k}\,dx + \frac{B}{2}\int \frac{2C/B-\beta}{[f(x)]^k}\,dx \\ &= -\frac{B}{2(k-1)}\frac{1}{[f(x)]^{k-1}} + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right)\int \frac{dx}{[f(x)]^k}.\end{aligned} \tag{22}$$

Es bleibt nun also noch ein Integral der Form $\int 1/[f(x)]^k\,dx$ zu berechnen. Bringe dieses wie in Abschnitt 6 durch eine quadratische Ergänzung auf die Form $\int 1/(t^2+a^2)^k\,dt$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} = \int \frac{dx}{((x+\beta/2)^2+\gamma-\beta^2/4)^k} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

wobei im letzten Schritt $a^2 = \gamma - \beta^2/4 > 0$ (vgl. (10)) und $t = x + \beta/2$ gesetzt wurde. Dieses Integral kann nun durch partielle Integration (vgl. Abschnitt 2) schrittweise um eine Potenz abgebaut werden (kurz: verwende die Ergebnisse (23) bzw. (24)):

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)a^2}\int \frac{2(k-1)t}{(t^2+a^2)^k}\,t\,dt.\end{aligned}$$

Das letzte Integral eignet sich für partielle Integration:

$$\int \left(-\frac{2(k-1)t}{(t^2+a^2)^k}\right) t\,dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}},$$

wobei bei der partiellen Integration (2) $f(t) = t$ bzw. $g(t) = 1/(t^2+a^2)^{k-1}$ gesetzt wurde. Damit erhält man folgende <u>Rekursionsformel</u> für Integrale vom Typ $\int 1/(t^2+a^2)^k\,dt$:

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{2(k-1)a^2(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}, \tag{23}$$

oder, wenn die Substitution rückgängig gemacht wird und $a^2 = \gamma - \beta^2/4$ (s.o.) eingesetzt wird (also mit $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$):

$$\int \frac{dx}{[f(x)]^k} = \frac{2x+\beta}{(k-1)(4\gamma-\beta^2)[f(x)]^{k-1}} + \frac{4k-6}{(4\gamma-\beta^2)(k-1)}\int \frac{dx}{[f(x)]^{k-1}}. \tag{24}$$

Wiederhole nun die Anwendung von (24) solange, bis im Nenner eine 1 steht — dann mache weiter wie bei Fall 3,

Beispiel: Für $k = 2$ gilt unter Beachtung der Formeln (22) und (24):

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}\,dx$$
$$= \frac{-B}{2(x^2+\beta x+\gamma)} + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right)\left\{\frac{2x+\beta}{(4\gamma-\beta^2)(x^2+\beta x+\gamma)} + \frac{2}{4\gamma-\beta^2}\int\frac{dx}{x^2+\beta x+\gamma}\right\}$$
$$= \frac{\beta C - 2B\gamma + x(2C-B\beta)}{(4\gamma-\beta^2)(x^2+\beta x+\gamma)} + \frac{2C-B\beta}{4\gamma-\beta^2}\frac{1}{\sqrt{\gamma-(\beta/2)^2}}\arctan\frac{x+\beta/2}{\sqrt{\gamma-(\beta/2)^2}}.$$

Die Lösung des Integrals im letzten Schritt wurde bereits in Formel (21) angegeben.

8 Integration nicht-rationaler Funktionen

Die nun folgenden Typen von Integralen, bei denen der Integrand keine rationale Funktion ist, wohl aber eine rationale Funktion enthält, lassen sich elementar berechnen:

Sei $R(x)$ stets eine *rationale Funktion* von x und sei $R(x,y,\dots,z)$ eine rationale Funktion der Veränderlichen $x,y,\dots,z$ — darunter versteht man einen Ausdruck, der durch eine endliche Anzahl von Anwendungen der rationalen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) aus den Größen $x,y,\dots,z$ entsteht.

Beispiel:

$$R(x,y,u,v,w,z) = \frac{\frac{x}{y}+uv}{\frac{v}{w}+z^{17}\pi}$$

$\boxed{\text{A}}$ Integrale der Form

$$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

mit $ad - bc \neq 0$ können durch die Substitution $t = \sqrt[k]{(ax+b)/(cx+d)}$ auf ein Integral über eine rationale Funktion von t überführt werden.

$\boxed{\text{B}}$ $\int R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)\,dx$ kann auf ein Integral über eine rationale Funktion von t zurückgeführt werden, wenn $t = \tan(x/2)$ gesetzt und benutzt wird, dass dann

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cot x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

$\boxed{\text{C}}$ $\int R(e^{ax})\,dx$:
Die Substitution $t = e^{ax}$ führt auf eine rationale Funktion von t.

$\boxed{\text{D}}$ $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\,dx$ geht nach der Substitution $x = \sinh t$ über in Typ C (beachte die Definition der hyperbolischen Funktionen).

$\boxed{\text{E}}$ $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$ geht nach der Substitution $x = \cosh t$ ebenfalls in Typ C über.

$\boxed{\text{F}}$ $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$ geht mit der Substitution $x = \cos t$ oder $x = \sin t$ über in ein Integral vom Typ B.

$\boxed{\text{G}}$ $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: Eine quadratische Ergänzung im Inneren der Wurzel führt auf einen der Fälle D, E oder F.

$\boxed{\text{H}}$ $\int p(x)g(x)\,dx$ mit $g(x) = e^{ax}, g(x) = \cos ax$ oder $g(x) = \sin ax, a \in \mathbb{R}$ und mit $p(x) =$ Polynom kann durch wiederholte partielle Integration berechnet werden. Als Anfang setzt man

$$u(x) = p(x), \quad v'(x) = g(x).$$

9 Anhang

In diesem Abschnitt werden drei verschiedene Methoden zur Lösung von Gleichungssystemen vorgestellt, die aber auch miteinander kombiniert werden können. Es handelt sich dabei um die Bestimmung von Unbekannten, die als Koeffizienten von Polynomen auftreten. Im ersten Fall wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt, das heißt, dass die Koeffizienten vor den Potenzen von x der Polynome verglichen werden. Im zweiten Fall wird aus den Gleichungen (in x) durch das Einsetzen spezieller Werte von x ein Gleichungssystem in den Koeffizienten gebildet, das dann wie in der Linearen Algebra gelöst wird. Im dritten Fall schließlich werden zur Vereinfachung der Gleichungssystemberechnung die einzelnen Gleichungen zum Teil differenziert.

9.1 Koeffizientenvergleich

Ausgehend von der Partialbruchzerlegung wird mit dem Hauptnenner durchmultipliziert und es entsteht eine Gleichung zwischen zwei Polynomen. Sortiert man in dieser Gleichung alles nach den Potenzen von x, dann müssen — da die Potenzen x^k ein linear unabhängiges System bilden — die Koeffizienten zu den einzelnen Potenzen gleich sein. Zur Erläuterung ein

Beispiel: Aus Formel (8) ergibt sich für die Partialbruchzerlegung des echt-rationalen Bruchs

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{3x^2-5}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}.$$

Daraus erfolgt durch Multiplikation mit $q_m(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (stetige Fortsetzung der Polynome in $x = 1, -1, 3$):

$$\begin{aligned} p_n(x) &= A_1(x+1)(x-3) + A_2(x-1)(x-3) + A_3(x-1)(x+1) \\ &= x^2(A_1+A_2+A_3) + x(-2A_1-4A_2) + (-3A_1+3A_2-A_3). \end{aligned} \tag{25}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der linken Seite, d.h. $p_n(x) = 3x^2 - 5$, liefert dann

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 3 \\ -2A_1 - 4A_2 &= 0 \\ -3A_1 + 3A_2 - A_3 &= -5. \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar $A_1 = 1/2, A_2 = -1/4, A_3 = 11/4$.

9.2 Einsetzungsmethode

Setzt man verschiedene x-Werte in die Gleichung zwischen den zwei Polynomen (vgl. Anhang 9.1) ein, dann erhält man ein Gleichungssystem, das man mit Mitteln der Linearen Algebra löst.

Beispiel: Aus der Gleichung (25) erhält man durch das Einsetzen der Nullstellen unmittelbar die Lösungen für A_1, A_2, A_3: Einsetzen von $x = 1$ in (25) liefert $3 - 5 = -4A_1 + 0 + 0$, woraus folgt, daß $A_1 = 1/2$ ist. Einsetzen von $x = -1$ bzw. $x = 3$ in (25) ergibt ebenso $A_2 = -1/4$ und $A_3 = 11/4$.

9.3 Ableitungsmethode

Bei der Bestimmung der Koeffizienten mit Hilfe der Ableitungsmethode macht man Gebrauch von der Differentialrechnung, denn wenn man eine Polynomgleichung, deren Koeffizienten zu bestimmen sind, k-mal differenziert, bleiben nur die Potenzen x^j für $j \geq k$ mit den dazugehörigen Koeffizienten übrig, so dass nach jeder Differentation ein Koeffizient durch Einsetzen geeigneter x-Werte berechnet werden kann.

Beispiel: Beginne mit der in Fall 2 hergeleiteten Formel (15) und setze $x = 0$ ein, daraus folgt sofort $A_{n,1} = 1$. Dann differenziere (15) einmal und erhalte

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = A_{1,1}(n-1)x^{n-2} + \ldots + A_{n-1,1}.$$

Setze wieder $x = 0$, und es folgt $A_{n-1,1} = 1$ u.s.w. Insgesamt folgt $A_{i,1} = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Bemerkung: Die Ableitungsmethode ist besonders geeignet, wenn der Nenner nicht bei $x_1 = 0$ mehrfache Nullstellen hat, sondern bei $x_1 \neq 0$, denn in solch einem Fall ist ein Koeffizientenvergleich meist nicht mehr so überschaubar.

Beispiel: Folgende Funktion hat eine zweifache Nullstelle bei $x = 1$:

$$\frac{1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{2,1}}{x-1} + \frac{A_{2,2}}{(x-1)^2}. \tag{26}$$

Daraus folgt

$$1 = A_{1,1}(x-1)^2 + A_{2,1}x(x-1) + A_{2,2}x.$$

Setzt man $x_1 = 0, x_2 = 1$, dann folgt sofort $1 = A_{1,1} = A_{2,2}$. Differenziert man die Formel einmal, so erhält man

$$0 = 2A_{1,1}(x-1) + A_{2,1}(2x-1) + A_{2,2}.$$

Setzt man $x = 1$ (dort ist ja die zweifache Nullstelle), dann ergibt sich $0 = A_{2,1} + A_{2,2}$, also $A_{2,1} = -1$. Das Ergebnis lautet dann also

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Literatur

[1] W. v. Mangoldt, K. Knopp: *Einführung in die höhere Mathematik, Bd. III.* Hirzel, Leipzig 1990.

[2] K. Lemnitzer: *Einführung in die Technik des Integrierens.* Vieweg, Braunschweig 1974.